

机密★启用前

重 庆 邮 电 大 学

2019 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目名称： 数学分析 (A)

科目代码： 602

考生注意事项

- 1、答题前，考生必须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
- 2、所有答案必须写在答题纸上，写在其他地方无效。
- 3、填（书）写必须使用 0.5mm 黑色签字笔。
- 4、考试结束，将答题纸和试题一并装入试卷袋中交回。
- 5、本试题满分 150 分，考试时间 3 小时。

一、解答下列各题：（10 分×6=60 分）

1、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$ ；

2、求不定积分 $\int \frac{\tan x \cos^6 x}{\sin^4 x} dx$ ；

3、利用积分中值定理计算：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(\sqrt[n]{x}) dx$ ；

4、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + L + \frac{1}{n}) x^n$ 的收敛半径与收敛域；

5、已知方程 $xyze^{x+y+z} - 1 = 0$ 确定了隐函数 $z = z(x, y)$ ，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ；

6、求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 被平面 $z = \frac{a}{4}, z = \frac{a}{2}$ 所夹部分曲面的面积。

二、（15 分）设 $a > 0, \sigma > 0, a_1 = \frac{1}{2}(a + \frac{\sigma}{a}), a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\sigma}{a_n}), n = 1, 2, L$. 证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{\sigma}$ 。

三、（15 分）设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}, x \in (0, +\infty)$ ，求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx$ 。

四、（15 分）利用区间套定理证明零点存在性定理。

五、（15 分）设 $f(x)$ 为区间 $[a, b]$ 上二阶可导函数， $f(a) = f(b) = 0$ ，并存在一点 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) > 0$ ，证明：至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f''(\xi) < 0$ 。

六、(15 分) 设 $f(x), g(x)$ 在有限开区间 I 内一致连续, 证明: $f(x)g(x)$ 在区间 I 内也一致连续。若将有限区间换为无穷区间, 结论是否成立?

七、(15 分) 设函数 $u(x, y)$ 在由封闭的光滑曲线 L 所围成的区域 D 上具有二阶连续偏导数, 证明:

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) d\sigma = \oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 是 $u(x, y)$ 沿 L 外法线方向 n 的方向导数。