

# 《数学分析》考试大纲

## 1. 函数

- 1.1 掌握实数概念及其基本性质。掌握实数绝对值的概念和有关的不等式。
- 1.2 掌握邻域概念，掌握确界定理。
- 1.3 掌握函数的概念及各种表示方法，掌握复合函数和反函数的概念。
- 1.4 掌握有界函数与无界函数、单调函数、奇函数和偶函数、周期函数等概念。
- 1.5 掌握六类基本初等函数的定义和性质。
- 1.6 掌握常用的几个非初等函数，如符号函数，狄利克雷函数等。

## 2. 数列极限

- 2.1 掌握数列极限的  $\varepsilon - \delta$  的定义，会使用“ $\varepsilon - \delta$  语言”证明数列的极限。
- 2.2 正确理解和掌握收敛数列的性质。
- 2.3 掌握单调有界原理，致密性定理及 Cauchy 收敛准则。

## 3. 函数极限

- 3.1 掌握函数极限的  $\varepsilon - M$  和  $\varepsilon - \delta$  定义。
- 3.2 掌握函数极限的性质。
- 3.3 掌握函数极限存在的条件，掌握归结原则及柯西准则。
- 3.4 掌握重要极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  和  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$  及其应用。
- 3.5 正确理解和掌握无穷大和无穷小的概念及无穷小的阶。

## 4. 函数的连续性

- 4.1 掌握连续函数的概念，掌握间断点及其分类。
- 4.2 掌握连续函数的局部性质，掌握闭区间上连续函数的性质。
- 4.3 掌握反函数的连续性，掌握函数的一致连续性。
- 4.4 掌握初等函数在其定义域上的连续性。

## 5. 导数与微分

- 5.1 掌握导数的概念及其几何意义。
- 5.2 掌握求导法则，掌握参变量函数的导数法则，掌握高阶导数的求法。
- 5.3 掌握微分的概念及其几何意义。

5.4 掌握微分的运算法则, 了解高阶微分, 了解微分在近似计算中的应用。

## 6. 微分中值定理及其应用

6.1 熟练掌握中值定理的条件、结论和证明方法。

6.2 掌握不定式极限的求法, 熟练掌握洛必达法则及其应用。

6.3 掌握泰勒公式, 掌握用多项式逼近函数的思想。

6.4 会分析函数的性态, 会求函数的单调区间和极值, 会判断函数的凸性和拐点, 会较完善地作出函数的图形。

## 7. 实数的完备性

7.1 理解区间套概念, 能熟练使用区间套定理。

7.2 掌握聚点概念及各种等价定义, 能熟练使用聚点定理。

7.3 理解(开)覆盖的定义并且会用集合术语表达, 体会如何构造开覆盖并且会用开覆盖定理。

7.4 知晓实数完备性的六种等价说法及其证明。

## 8. 原函数与不定积分

8.1 掌握原函数定义及唯一性(不计常数)。

8.2 掌握不定积分的定义、性质。

8.3 熟练使用换元公式和分部积分公式。

8.4 了解有理函数不定积分的计算方法。

8.5 了解某些其它类型不定积分的计算方法。

## 9. 定积分 (Riemann 积分)

9.1 深入理解定积分概念及其产生背景。

9.2 熟练掌握可积性的判别准则及可积函数类。

9.3 熟练掌握定积分的性质及积分中值定理。

9.4 重点掌握微积分学基本定理和 Newton-Leibniz 公式。

9.5 熟练使用定积分工具解决几何、物理和学科的问题。

## 10. 反常积分

10.1 深入理解反常积分概念及其产生背景。

10.2 熟练使用反常积分的收敛判别法。

## 11. 数项级数

11.1 深入理解数项级数的概念及其产生背景。

11.2 直观理解绝对收敛和条件收敛概念。

11.3 熟练使用正项级数和一般项级数的收敛判别法。

## 12. 函数列、函数项级数和幂级数

12.1 深入理解逐点收敛和一致收敛概念，重点在一致收敛。

12.2 熟练使用一致收敛的 Cauchy 准则及收敛判别法。

12.3 掌握一致收敛函数列（函数项级数）之极限函数（和函数）的分析性质，即连续性、可积性、可微性。

12.4 能熟练求出一个幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域。

12.5 熟知幂级数在其收敛区间上的性质（内闭一致收敛性、连续性、逐项可积和逐项可导性）。

12.6 掌握将光滑函数展为幂级数的基本方法。

## 13. 傅里叶（Fourier）级数

13.1 深入理解傅里叶级数及其产生的物理背景。

13.2 会做一个可积函数的傅里叶级数。

13.2 掌握三角函数系的正交性、Bessel 不等式和 Riemann-Lebesgue 引理。

13.4 了解有关傅里叶级数收敛性的一些结果。

## 14. 多元函数微分学

14.1 掌握平面点集的一些概念：邻域、内点、界点、聚点、区域、闭区域、有界区域、无界区域等。

14.2 掌握二元函数和二元函数极限的定义，弄清二重极限与累次极限的区别及其联系。

14.3 掌握二元连续函数的定义以及性质。

14.4 理解可微性的条件、几何意义及应用。

14.5 熟练计算偏导数和高阶偏导数。

14.6 了解方向导数与梯度的定义。

14.7 会运用泰勒公式解决极值问题。

## 15. 隐函数

15.1 理解隐函数的概念及存在性的条件。

15.2 了解隐函数组的概念及定理并掌握几何运用。

15.3 掌握条件极值的求法。

## 16. 含参变量的积分

16.1 掌握含参量正常积分及反正常积分。

16.2 掌握一致收敛的判别法。

16.3 理解欧拉积分并会应用。

## 17. 重积分

17.1 掌握二重积分的概念，理解二重积分的可积函数类与性质。

17.2 掌握二重积分的计算，掌握二重积分的变量变换和二重积分的应用。

17.3 掌握三重积分的概念。

17.4 掌握三重积分的计算，掌握三重积分的变量变换和应用。

## 18. 曲线积分与曲面积分

18.1 正确理解第一型曲线积分和第二型曲线积分的概念。

18.2 掌握第一型曲线积分和第二型曲线积分的计算。

18.3 会运用格林公式和积分与路径无关的条件解决问题。

18.4 正确理解第一型曲面积分和第二型曲面积分的概念。

18.5 掌握第一型曲面积分和第二型曲面积分的计算。

18.6 会运用高斯公式和斯托克斯公式。

18.7 了解场的概念和各种场。

# 《高等代数》考试大纲

## 1. 行列式

- 1.1 了解排列的概念及性质。
- 1.2 熟练掌握行列式的概念、性质。
- 1.3 掌握行列式的计算方法。
- 1.4 熟悉克拉姆法则。
- 1.5 对矩阵及矩阵的初等变换有初步的了解。

## 2. 线性方程组

- 2.1 掌握 $n$ 维向量及 $n$ 维向量空间的概念，熟练掌握向量的运算。
- 2.2 熟练掌握向量组的线性相关性，理解向量组的极大无关组。
- 2.3 深刻理解向量组的秩和矩阵的秩的定义，掌握矩阵秩的计算方法。
- 2.4 熟练掌握线性方程组的有解判别定理。
- 2.5 正确理解和掌握齐次线性方程组的基础解系的概念和计算方法，熟练掌握线性方程组的解的结构定理，会求解线性方程组。

## 3. 矩阵

- 3.1 了解矩阵概念的一些背景。
- 3.2 熟练掌握矩阵的运算及运算律。
- 3.3 掌握矩阵乘积的行列式定理，矩阵乘积的秩与它的因子的秩的关系。
- 3.4 深入理解矩阵可逆、逆矩阵、伴随矩阵等概念，掌握方阵可逆的充要条，会用伴公式法求矩阵的逆矩阵。
- 3.5 理解分块矩阵的意义，掌握分块矩阵的运算及性质。
- 3.6 正确理解和掌握初等矩阵、初等变换的概念及它们的关系，熟练掌握利用初等变换方法求矩阵的逆矩阵。
- 3.7 了解分块乘法的初等变换，会将矩阵分块与初等变换结合进行矩阵运算。

## 4. 二次型

- 4.1 正确理解二次型非退化线性替换的概念，掌握二次型的矩阵表示，掌握矩阵合同的概念与性质。
- 4.2 掌握化二次型为标准形的方法。

4.3 深刻理解对称矩阵与二次型的关系，掌握对称矩阵的性质。

4.4 掌握惯性定理，熟练掌握正定二次型的等价条件。

4.5 掌握半正定二次型的等价条件。

## 5. 线性空间

5.1 掌握集合与映射的相关概念。

5.2 熟练掌握线性空间及其基于维数等相关概念。

5.3 会求线性空间的基与维数。

5.4 掌握基变换与坐标变换的公式。

5.5 熟练掌握线性子空间的概念及其判定方法。

5.6 掌握子空间的交与和的定义及性质，熟练掌握维数公式。

5.7 深刻理解子空间的直和的概念，掌握判定直和的充要条件。

5.8 理解并掌握线性空间同构的定义、性质及有限维空间同构的充要条件。

## 6. 线性变换

6.1 理解并掌握线性变换的定义及性质。

6.2 掌握线性变换的运算及运算律，理解线性变换的多项式。

6.3 掌握线性变换与矩阵的关系，掌握矩阵相似的概念及性质。

6.4 理解并掌握矩阵的特征值、特征向量、特征多项式的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量，掌握哈密尔顿-凯莱定理。

6.5 掌握线性变换的值域与核的概念及相关理论。

6.6 了解不变子空间与线性变换矩阵化简之间的关系。

## 7. 欧几里得空间

7.1 深刻理解并掌握欧几里得空间的基本概念和理论。

7.2 掌握向量的内积和向量的度量性质。

7.3 正确理解正交向量组、标准正交基的概念，掌握施密特正交化方法。

7.4 理解并掌握正交变换的概念与等价条件，掌握正交变换与向量长度、标准正交基以及正交矩阵的关系。

7.5 理解两个子空间正交的概念，掌握正交与直和的关系。

7.6 熟练掌握实对称矩阵的进一步性质。

## 8. 多项式

- 8.1 了解多项式的定义与基本运算。
- 8.2 掌握多项式整除的概念、性质与带余除法。
- 8.3 掌握最大公因式的概念、存在性与求法, 掌握多项式互素的概念与相关性质。
- 8.4 掌握不可约多项式的概念、性质。
- 8.5 了解因式分解定理以及复系数与实系数多项式的因式分解定理。
- 8.6 了解重因式的概念以及多项式有重因式的充要条件。
- 8.7 了解多项式函数的概念、余数定理、代数基本定理。
- 8.8 掌握求有理系数多项式的全部有理根的方法以及 Eisenstein 判别法。

## 9. $\lambda$ -矩阵

- 9.1 了解  $\lambda$ -矩阵的定义、 $\lambda$ -矩阵的初等变换、 $\lambda$ -矩阵的标准形以及  $\lambda$ -矩阵的行列式因子、不变因子等概念, 了解  $\lambda$ -矩阵等价的充要条件, 掌握用初等变换将  $\lambda$ -矩阵化为标准形的方法。
- 9.2 掌握矩阵初等因子的概念、求法以及数字矩阵相似的充要条件。
- 9.3 了解矩阵的 Jordan 标准形以及有理标准形的概念, 掌握矩阵的 Jordan 标准形的求法, 了解矩阵有理标准形的求法。

# 《常微分方程》考试大纲

## 1. 初等积分法

- 1.1 掌握微分方程与解的基本定义，认识常微分方程课程的整体结构。
- 1.2 掌握分离变量法，会用该方法求解变量可分离方程。
- 1.3 掌握两类可转化为可分离变量形式微分方程的解法，重点掌握齐次方程解法。
- 1.4 掌握一阶线性常微分方程的解法——常数变易法，会用该方法求解非齐次方程。
- 1.5 掌握全微分方程及积分因子的基本概念，掌握全微分方程求解法，会用积分因子法将非全微分方程转化为全微分方程。
- 1.6 掌握参数法求解一阶隐式微分方程，具体会解 4 种形式的一阶隐式微分方程。
- 1.7 掌握几种可降阶的高阶方程的解法。
- 1.8 介绍一阶微分方程应用举例 1. 等角轨线；2. 在动力学中的应用。

## 2. 基本定理

- 2.1 了解微分方程定性理论的发展背景，掌握微分方程解的几何意义。
- 2.2 重点掌握解的存在性与唯一性定理，理解定理条件。
- 2.3 掌握可延展解与不可延展解的定义，掌握不可延展解的存在定理和性质。
- 2.4 掌握奇解概念及求解奇解的方法。掌握包络的概念及求解包络的方法。掌握克莱洛方程的类型及求解方法。
- 2.5 掌握解对初值的连续依赖性和解对初值的可微性。

## 3. 一阶线性微分方程组

- 3.1 掌握线性微分方程组的一般理论及微分方程组所有解的代数结构。
- 3.2 掌握齐线性微分方程组的基解矩阵。
- 3.3 掌握非齐方程组的常数变易法。
- 3.4 掌握运用特征根求解常系数齐线性微分方程组的基解矩阵。常系数非齐次线性微分方程组的通解公式。
- 3.5 掌握常系数齐次线性微分方程组的基解矩阵为  $\phi(x) = e^{xA}$ 。

## 4. n 阶线性微分方程

- 4.1 掌握 n 阶线性齐次方程的一般理论，包括通解结构、基本解组的概念；掌握

非齐次线性微分方程的通解结构, 已知齐次方程通解会运用常数变易法求非齐方程通解。

- 4.2 重点  $n$  阶常系数线性齐次方程解法, 即运用特征方程的特征根求解  $n$  阶常系数齐线性方程的通解。
- 4.3 掌握系数比较法求解  $n$  阶常系数线性非齐次方程的运算技巧。
- 4.4 理解二阶常系数线性方程与振动现象的关系。
- 4.5 了解拉普拉斯变换。

## **5. 常微分方程解的稳定性介绍**

- 5.1 掌握常微分方程解稳定性概念, 及稳定性的判定方法。
- 5.2 掌握李雅普诺夫第二方法。
- 5.3 了解平面自治系统基本概念, 了解某些平面定性理论。

# 《复变函数》考试大纲

## 1. 复数及其几何表示

- 1.1 掌握复数及其运算，掌握复数域概念。
- 1.2 掌握复数的几种表示方法。
- 1.3 掌握复数的球极射影、复球面、无穷大及扩充的复平面等概念。
- 1.4 掌握内点、聚点、边界点、开集、闭集及紧集等复平面拓扑概念。
- 1.5 掌握简单曲线及光滑曲线概念，掌握若尔当定理。

## 2. 复变函数

- 2.1 掌握复变函数以及复变函数的极限、连续、可微和解析等概念。
- 2.2 熟练掌握柯西—黎曼条件。
- 2.3 掌握辐角函数，了解多值函数。
- 2.4 掌握支点概念，掌握指数函数、对数函数、幂函数及三角函数等初等函数。

## 3. 复变函数的积分

- 3.1 掌握复变函数积分的定义及性质。
- 3.2 掌握多边形区域周界的积分性质，掌握积分与原函数的关系。
- 3.3 熟练掌握柯西定理。
- 3.4 熟练掌握柯西公式并会运用该公式进行积分计算。
- 3.5 掌握莫雷拉定理。

## 4. 级数

- 4.1 掌握级数和数列的基本性质，掌握复数项级数和复数序列的收敛性及收敛的条件。
- 4.2 掌握幂级数的收敛性，掌握幂级数的收敛半径的求法。
- 4.3 掌握解析函数的泰勒展式，掌握解析函数泰勒展式的唯一性。
- 4.4 掌握解析函数的零点、零点的阶及零点的孤立性。
- 4.5 掌握解析函数的洛朗展式和洛朗级数，掌握洛朗展式的唯一性。
- 4.6 掌握解析函数的孤立奇点，掌握孤立奇点的判别方法。
- 4.7 掌握解析函数在无穷远点的性质。

## 5. 留数

- 5.1 掌握留数概念及留数定理，掌握留数的计算方法。

5.2 掌握留数在计算定积分和广义积分计算中的应用。

## 6. 保形映射

6.1 掌握单叶解析函数概念及性质。

6.2 掌握导数的几何意义。

6.3 掌握分式线性函数的概念，掌握分式线性函数的构成。

6.4 掌握分式线性函数的映射性质。

6.5 掌握两个特殊的分式线性函数：把上半平面保形映射成单位圆盘的分式线性函数；把单位圆盘保形映射成单位圆盘的分式线性函数。

6.6 了解最大模原理。

# 《实变函数》考试大纲

## 1. 集合与基数

- 1.1 掌握集合概念及其运算:De Morgan 公式。
- 1.2 熟练掌握集合基数概念。
- 1.3 重点掌握可数集合的性质。
- 1.4 了解不可数无穷集。
- 1.5 掌握邻域、内部、导集、开集、闭集、完备集的概念。
- 1.6 掌握开集、闭集、完备集、Borel 集的性质及构造。

## 2. 测度理论

- 2.1 掌握外测度的定义及其性质。
- 2.2 重点掌握测度的定义及其性质。
- 2.3 重点掌握一维空间点集的测度: 开集的测度, 闭集的测度。
- 2.4 了解乘积空间点集的测度。

## 3. 可测函数

- 3.1 掌握可测函数的定义及其性质。
- 3.2 掌握几乎处处的概念。
- 3.3 重点掌握 Egoroff 定理。
- 3.4 重点掌握可测函数的结构及 Lusin 定理。
- 3.5 重点掌握依测度收敛。

## 4. 积分理论

- 4.1 掌握非负可测函数积分的定义及性质。
- 4.2 掌握可测函数积分的定义及性质。
- 4.3 重点掌握 Levi 定理。
- 4.4 重点掌握 Fatou 引理。
- 4.5 重点掌握 Lebesgue 控制收敛定理。
- 4.6 了解 Lebesgue 有界收敛定理。
- 4.7 了解 Fubini 定理。
- 4.8 了解不定积分。

# 《近世代数》考试大纲

## 1. 基本概念

- 1.1 理解集合的概念，了解元素与集合之间的关系，以及集合之间的运算。
- 1.2 理解映射的概念，能在集合之间建立映射关系，并判断两个映射是否相同。
- 1.3 掌握代数运算的概念及其满足的运算律，能建立有限集合之间的运算表。
- 1.4 掌握同态映射和同构映射的概念，理解同态与同态满射的关系，并能判定映射是否是同态满射或是单射，掌握具有同态满射的集合之间的联系。
- 1.5 理解关系和等价关系的概念，掌握等价关系和分类之间的转换定理，和熟练判定给定的关系是否是等价关系，并熟悉剩余类的基本特性，以便为群、环提供典型的范例，能建立整数间给定的模的剩余类

## 2. 群

- 2.1 熟悉群的定义，理解左、右单位元，左、右逆元的意义，掌握有限群、无限群、群的阶和交换群的概念。
- 2.2 理解群同构、同态的定义，掌握群同态的有关性质。
- 2.3 掌握循环群的定义和由生成元决定循环群的性质与特点，熟练掌握剩余类加群的性质和运算，知道循环群可以与整数加群或模为  $n$  的剩余类加群同构。
- 2.4 了解变换群的定义，理解置换群定义，掌握对称群中元素的乘法、元素求逆等运算，理解循环置换、对换定义。
- 2.5 了解子群的定义以及子群与子群之间的关系，掌握正规子群的定义和判定条件及其性质，理解商群的定义。
- 2.6 掌握陪集的定义，以及与等价关系和分类之间的关系，了解子群与陪集之间的映射关系，掌握关于群的阶数和指数的几个重要定理。
- 2.7 理解群同态和同构的定义，重点掌握群同态基本定理和群同构定理，掌握群同态基本定理和同构定理证明的应用。

## 3. 环与域

- 3.1 理解环和交换环的定义，熟悉单位元、逆元和零因子的性质并能熟练运用，掌握消去律与零因子的关系。
- 3.2 理解整环、除环和域的定义，理解环特征的定义，掌握判别环是除环、域的方法。

- 3.3 了解子环、子除环、子域定义，掌握判别子环、子域的方法。
- 3.4 理解理想、主理想的定义，会判别一个理想子环是否为主理想子环。
- 3.5 掌握素理想、极大理想的概念，并了解这两类理想的判别方法。
- 3.6 了解商环的定义，熟悉模  $n$  的剩余类的运算，了解在同态映射下的两个环相互之间的关系、性质，掌握环的同态基本定理。

#### **4. 唯一分解整环**

- 4.1 了解整环元素整除的定义，了解单位、相伴元、真因子、既约元的定义及之间关系。
- 4.2 理解唯一分解环的定义，掌握判别唯一分解环的方法。
- 4.3 理解主理想整环、欧氏环的定义，了解与其相关的定理。

#### **5. 域的扩张**

- 5.1 了解扩域的定义和相关定理，理解单扩域、素域的定义。
- 5.2 了解超越元，单超越扩域；代数元，单代数扩域的定义。