中国科学技术大学
843 信号与系统

（真题精讲课程内部讲义）

海文考研专业课教研中心

http://a.wanxue.cn

2012 年真题

【点评】本年份真题包括以下 2 种题型：10 道计算题，每道题 7 分，总计 70 分；2 道综合题，每道题 40 分，总计 80 分；（2012 年的真题还没出来，只有回忆版，数据并不准确。有的题目是以前某一年的真题，但是 2012 年再次考到，数据不一样，但题型没有太大变化。准确的数据会到冲刺班得到。但总体的模式不会变。）

和往年考试题目对比，题型基本没有改变。

2012 年对《数字信号处理》这门课程的考察不是很多，主要是《信号与系统》的题目。但是复习的时候《数字信号处理》一定要学，因为大纲是要求的。

【题目】1 已知输入信号 $x(t)=\sin\pi t[u(t)-u(t-1)]$，系统的单位冲激响应 $h(t)=u(t)-u(t-1)$，求系统的输出 $y(t)$。

【解题】

$y(t)=x(t)*h(t)=\sin\pi t[u(t)-u(t-1)]*u(t)-u(t-1)$

$=[\sin\pi t u(t)-\sin\pi t u(t-1)]*u(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)]$

$=[\sin\pi t u(t)*u(t)-\sin\pi t u(t-1)*u(t)]*[\delta(t)-\delta(t-1)]$

$=\dfrac{1}{\pi}\{(1-\cos\pi t)u(t)+[1-\cos\pi(t-1)]u(t-1)\}*[\delta(t)-\delta(t-1)]$

$=\dfrac{1}{\pi}\{(1-\cos\pi t)u(t)-[1-\cos\pi(t-2)]u(t-2)\}$

【分析】该题主要考察卷积的掌握，卷积是分析 LTI 系统很有效的工具，也是历年考试的重点。LTI 系统的输出等于输入与单位冲激响应的卷积，命题人主要考察考生能否应用卷积求系统的输出，考生应该熟练掌握。复习的时候要仔细理解卷积的定义，要熟练应用定义和性质求卷积。本题先是利用阶跃函数和冲激函数的性质化简式子，得到 $[\sin\pi t u(t)*u(t)-\sin\pi t u(t-1)*u(t)]*[\delta(t)-\delta(t-1)]$ 的形式，而其中 $\sin\pi t u(t)*u(t)$ 是用卷积的定义来求的，即 $\sin\pi t u(t)*u(t)=\int_0^t \sin\pi\tau d\tau=\dfrac{1}{\pi}(1-\cos\pi t)u(t)$，这是个很简单的定积分，很容易求。最后得到 $\dfrac{1}{\pi}\{(1-\cos\pi t)u(t)+[1-\cos\pi(t-1)]u(t-1)\}$ 与 $[\delta(t)-\delta(t-1)]$ 的卷积，利用冲激函数的性质就很容易求解。如果未化简就直接求解，会使求解过程过于复杂，也很容易出错。这就要求我们要熟练掌握书中的各种公式的性质，而何时何地选择何种性质和公式则需要考生多做题联系来总结规律。在考试的时候要选择最简洁的办法来求解题目，否则既浪费时间又很容易出错。

【题目】2 由差分方程 $y[n]-0.5y[n-1]=\sum_{k=0}^{4}(x[n-k]-2x[n-k-1])$ 和非零起始条件 $y[-1]=1$ 表示的离散时间因果系统，当系统输入 $x[n]=\delta[n]$ 时，试用递推算法求：

1、该系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$(至少计算出前 6 个序列值)；

2、该系统的零状态响应 $y_{zi}[n]$(至少计算出前 4 个序列值)。

【解题】

1、$\sum_{k=0}^{4}(x[n-k]-2x[n-k-1])$

$=x[n]-2x[n-1]+x[n-1]-2x[n-2]+x[n-2]-2x[n-3]+x[n-3]-2x[n-4]+x[n-4]-2x[n-5]$

$=x[n]-x[n-1]-x[n-2]-x[n-3]-x[n-4]-2x[n-5]$

则：

$y[n]=x[n]-x[n-1]-x[n-2]-x[n-3]-x[n-4]-2x[n-5]+0.5y[n-1],y[-1]=0$

$y[0]=x[0]+0=1$

$y[1]=x[1]-x[0]+0.5y[0]=-0.5$

$y[2]=-x[0]+0.5y[1]=-1.25$

$y[3]=-x[0]+0.5y[2]=-\frac{13}{8}$

$y[4]=-x[0]+0.5y[3]=-\frac{29}{16}$

$y[5]=-x[0]+0.5y[4]=-\frac{93}{32}$

2、$y[0]=0.5y[-1]=0.5$

$y[1]=0.5y[0]=0.25$

$y[2]=0.5y[1]=0.125$

$y[3]=0.5y[2]=0.0625$

【分析】该题主要考察用递推算法求解差分方程以及对零状态响应和零输入响应的理解。差分方程是离散系统的一种表示，用时域和 Z 域的方法都能求解，而用递推算法是最简单最直观的一种求解方法，能够看到每一时刻系统的输出，有助于我们更好的理解离散系统的特点。而系统全响应的组成，从不同的方面可以看作不同的组成，譬如零状态和零输入、自由和强迫、稳态和暂态。这都是是考察的重点，历年真题也屡次出现。本题其实考的不是计算，而是对概念的理解。对于上述提到的概念以及其他书中涉及到的多个相似但却有区别的概念，要反复理解区别，最好是自己能总结出整个结构，不仅有助于考试，更重要的是让自己对信号与系统这门课有更深刻的理解。

2011 年真题

【点评】本年份真题包括以下 2 种题型：9 道计算题，前 4 题每道题 5 分，后 5 题每道题 8 分，总计 60 分；6 道综合题，总计 90 分；

和往年考试题目对比，题型基本没有改变。

2011 年由于大纲要求，真题考察了《信息论》的知识，其他年份都没有要求。因此目前有关信息论的知识暂不讨论。

【题目】1 已知某因果连续时间信号 x(t)，它的拉普拉斯变换的像函数为 $X(s)=(2s+3)/(s^2+5s+6)$，试求信号 x(t)的初值 $\lim\limits_{t\to 0+} x(t)$ 和终值 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$。

【解题】

根据拉普拉斯变换初值定理 $\lim\limits_{t\to 0+} x(t)=\lim\limits_{s\to\infty} sX(s)=\lim\limits_{s\to\infty} s(2s+3)/(s^2+5s+6)=2$

根据拉普拉斯变换终值定理 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=\lim\limits_{s\to 0} sX(s)=\lim\limits_{s\to 0} s(2s+3)/(s^2+5s+6)=0$

【分析】该题主要考察考生对拉普拉斯初值定理和终值定理的掌握。类似的题目历年真题也有考到。这个知识点不是很难掌握，只要熟记拉普拉斯变换和 Z 变换的初值定理和终值定理一共 4 个公式就好，计算起来也不是很复杂。主要是注意区分这 4 个公式，s 和 z 在不同的公式中各趋近于什么以及 F(s)和 F(z)前面乘的是什么。只要记牢公式，碰到这样的题不应该存在问题。

【题目】2 试求 $X(s)=\dfrac{se^{-2s-2}}{(s+1)(s^2+2s+5)}$，Re{s}>-1 的拉普拉斯反变换。

【解题】

$$X(s)=\frac{se^{-2s-2}}{(s+1)(s^2+2s+5)}=\frac{s}{(s+1)(s^2+2s+5)}e^{-2s-2}$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{4}s+\frac{5}{4}}{s^2+2s+5}-\frac{\frac{1}{4}}{s+1}\right)e^{-2s-2}=\frac{1}{4}\left(\frac{s+5}{(s^2+2s+1)+2^2}-\frac{1}{s+1}\right)e^{-2s-2}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{(s+1)+4}{(s+1)^2+2^2}-\frac{1}{s+1}\right)e^{-2s-2}=\frac{1}{4}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}+2\frac{2}{(s+1)^2+2^2}-\frac{1}{s+1}\right)e^{-2s-2}$$

由于 Re{s}>-1，则

$$x(t)=\frac{1}{4}e^{-t}\cos 2(t-2)u(t-2)+\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2(t-2)u(t-2)-\frac{1}{4}e^{-t}u(t-2)$$

【分析】本题主要考察考生是否能熟练求解拉普拉斯反变换。拉普拉斯变换是求解微分方程的很重要的手段，一般情况下，求解的难度也比直接在时域求解要低。而要用拉普拉斯变换求解方程来得到输出的

话，就必然会用到拉普拉斯反变换。因此熟练应用拉普拉斯反变换不但是考试的考点，更是分析系统必不可少的手段，非常重要。历年考试也经常考到。对于拉普拉斯变换及其反变换，同学需要掌握几种常用的信号的拉普拉斯变换、拉普拉斯变换在时域和复频域的性质以及数学上的一些技巧比如部分分式展开。另外，拉普拉斯变换的收敛域也是考点，需要理解透彻。同理，Z 变换也要做到上述要求。

2010 年真题

【点评】本年份真题包括以下 2 种题型：8 道计算题，前 4 题每道题 5 分，后 4 题每道题 7 分，总计 48 分；6 道综合题，总计 102 分；

和往年考试题目对比，题型基本没有改变。

2010 年的题目不是很好做，主要是对《数字信号处理》这门课程的考察上，出题的分量比较大。而根据对以往历年真理的分析，数字信号处理的题目并不好做，也不好复习。所以同学们在复习数字信号处理的时候要足够重视，但也不要过分焦虑。

【题目】1 计算 $\dfrac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n} * \dfrac{\sin\frac{\pi n}{3}}{\pi n}$，其中符号*为卷积运算符号。

【解题】

由于 $\dfrac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n} \xrightarrow{DTFT} F_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2}+2k\pi \le \omega \le \frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$\frac{\sin\frac{\pi n}{3}}{\pi n} \xrightarrow{DTFT} F_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$DTFT\left\{\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n} * \frac{\sin\frac{\pi n}{3}}{\pi n}\right\} = F_1(e^{j\omega})F_2(e^{j\omega}) = F_2(e^{j\omega})$$

再做 IDTFT 有

$$\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n} * \frac{\sin\frac{\pi n}{3}}{\pi n} = \frac{\sin\frac{\pi n}{3}}{\pi n}$$

【分析】该题主要考察考生对常用信号傅里叶变换的掌握。难度不大，但是是历年常考的内容。傅里叶分析是整个信号与系统体系的核心，每年的综合题目必然少不了考傅里叶变换的相关知识点。而对常用傅里叶变换的掌握也就成了重点中的重点。所以考生在复习这部分知识的时候，要对常用连续信号和离散

信号的傅里叶变换熟记于心，例如冲激函数、阶跃函数、三角函数、抽样函数、单位开关信号等。另外对于一些稍微复杂一点的信号的推导求解也要熟悉，例如升余弦函数，2012 年就考到了。

【题目】2 现有一长度为 N 的序列{x[n],n=0,1,...,N-1}。设 N 可以表达为两个正整数的乘积，即 N=ML，这里 M 和 L 分别为两个正整数。现欲求序列 x[n]的 DFT。为减少乘法运算量，要求将 N 点 DFT 分解成为若干 M 点 DFT 和若干 L 点 DFT 进行运算。试求：

1)推导出分解运算表达式；

2)给出分解运算后的复数乘法运算量，并与直接计算 N 点 DFT 所需的复数乘法运算量作比较，给出你的结论。

【解题】

1)由于 N=ML，那么 x[n]中的序号 n 可以表示成 $n=Mn_0+n_1$，其中$\begin{cases} n_0 = 0 \sim L-1 \\ n_1 = 0 \sim M-1 \end{cases}$

可以证明 n=0~N-1。

令 X(k)=DFT{x[n]}，k=1~N-1。

同理，X(k)中的序号 k 也可以表示成 $k=Lk_0+k_1$，其中$\begin{cases} k_0 = 0 \sim M-1 \\ k_1 = 0 \sim L-1 \end{cases}$

同样可以证明这个表示方法是正确的。

由定义出发：$X(k)=DFT\{x[n]\}=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} \quad ,W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

代入 $n=Mn_0+n_1$，$k=Lk_0+k_1$ 有：

$$X(Lk_0+k_1)=\sum_{n_0=0}^{L-1}\sum_{n_1=0}^{M-1} x[Mn_0+n_1]W_N^{(Mn_0+n_1)(Lk_0+k_1)}$$

$$=\sum_{n_0=0}^{L-1}\sum_{n_1=0}^{M-1} x[Mn_0+n_1]W_N^{MLn_0k_0}W_N^{Mn_0k_1}W_N^{Ln_1k_0}W_N^{n_1k_1}$$

$$=\sum_{n_0=0}^{L-1}\sum_{n_1=0}^{M-1} x[Mn_0+n_1]W_N^{n_1k_1}W_M^{n_1k_0}W_L^{n_0k_1}$$

$$=\sum_{n_1=0}^{M-1} W_N^{n_1k_1}\left(\sum_{n_0=0}^{L-1} x[Mn_0+n_1]W_L^{n_0k_1}\right)W_M^{n_1k_0}$$

$$=\sum_{n_1=0}^{M-1} W_N^{n_1k_1}X(Mk_1+n_1)W_M^{n_1k_0} = X(Mk_1+k_0)$$

其中 $X(Mk_1+n_1)=\sum_{n_0=0}^{L-1}x[Mn_0+n_1]W_L^{n_0k_1}$ =DFT{x[Mn_0+n_1]}，它是 M 个 L 点 DFT，而 $X(Mk_1+k_0)$ 是 L 个 M 点 DFT。

2)M 个 L 点 DFT 需 ML^2 次复数乘法，L 个 M 点 DFT 需 LM^2 次复数乘法，而旋转因子 $W_N^{n_1k_1}$ 还需要 N 次复数乘法，因此共需 $LM^2+ML^2+N=N(M+L+1)$。而直接计算 N 点 DFT 需要 N^2 次复数乘法。当 N 很大时，ML 远大于 M+L+1。因此可以有效地节省计算量。

【分析】该题考察了 N 可以分解为符合数的 FFT 算法。FFT 算法由于可以有效节省计算量，被广泛应用于通信与信号系统中，是必须掌握的基本技能。从上面的解答过程可以看出，这种算法是偏向于纯数字的计算，需要考生有不错的数学水平，复习起来不是太容易。同学们在复习的时候最好先从 DFT 的概念公式入手，弄懂 DFT 的来龙去脉，牢记 DFT 的定义公式，然后再学习 FFT。学习 FFT 的时候先弄懂最简单的基-2 算法，然后循序渐进学习几种常见 FFT 算法。但是也不要花太多的时间在上面。根据历年真题的情况来看，信号与系统始终还是考试的重点，在信号与系统复习得扎实的情况下，有充裕的时间，可以仔细钻研，如果到最后复习的时间不够，可以稍微调整一下。自己在复习的时候要认真规划一下在这两门课上花的时间。

2009 年真题

【点评】本年份真题包括以下 2 种题型：6 道计算题，总计 40 分；5 道综合题，总计 110 分；和往年考试题目对比，题型基本没有改变。

2009 年的题目是改变出题风格的第一年，整个试卷的风格还是延续了以往，综合性比较强，但是已经开始向考察考生基础知识掌握情况的方向改变。虽然最近几年的试题相比以前的可能好做一点，但是综合性强的题目可能对理解信号与系统这门课程更有帮助一些。

【题目】1 某连续时间因果 LTI 系统的频率响应为 $H(\omega)=\dfrac{(j\omega-2)e^{-j2\omega}}{6-\omega^2+j5\omega}$，试求：

1.请给出该系统的系统函数，并给出收敛域。

2.给出该系统的微分方程描述，并给出系统的幅频响应|H(ω)|。

【解题】

1. $H(\omega)=\dfrac{(j\omega-2)e^{-2j\omega}}{(j\omega)^2+5j\omega+6}$

$$H(s)=H(\omega)|_{s=j\omega}=\frac{(s-2)e^{-2s}}{s^2+5s+6}=\frac{(s-2)e^{-2s}}{(s+2)(s+3)}$$，ROC：Re{s}>-2

2. $H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{(s-2)e^{-2s}}{(s+2)(s+3)}$

$$s2Y(s)+5sY(s)+6Y(s)=e^{-2s}sX(s)-2e^{-2s}X(s)$$

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x'(t-2)-2x(t-2)$$

$H(j\omega)=\dfrac{(j\omega-2)e^{-j2\omega}}{(j\omega+2)(j\omega+3)}$ 而 $\dfrac{j\omega-2}{j\omega+2}$ 是全通网络，$\left|\dfrac{j\omega-2}{j\omega+2}\right|=1$。

则 $|H(\omega)|=\dfrac{1}{|j\omega+3|}=\dfrac{1}{\sqrt{\omega^2+9}}$

【分析】该题主要考察了拉氏变换和傅里叶变换之间的关系，以及傅里叶变换最基本的处理手段——幅频特性。拉氏变换和傅里叶变换每年几乎都要考的，所以要求同学们一定要掌握。在复习得时候，要掌握傅里叶变换的推导，幅频和相频的求解，要会画出其图形，并会根据图形分析系统，求系统的输出。会根据拉氏变换的零极点分析系统并求系统的输出。一定要熟练地应用图形来分析系统，很多题目利用图形分析会使计算变得很简单，硬算反而得不到答案。希望同学们在复习的时候多加注意。

【题目】2 已知 $f[n]=x[n]\cos(\pi n/4)$，其离散时间傅里叶变换为 $F(e^{j\Omega})=\begin{cases}1, & |\Omega|<\pi/2\\ 0, & \pi/2<|\Omega|\le\pi\end{cases}$，在 Ω 的主值区间 $(-\pi,\pi)$ 内。试确定序列 $x[n]$。

【解题】

由 IDTFT 公式得：$f[n]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1\cdot e^{j\Omega n}d\Omega=\dfrac{1}{2\pi nj}\cdot e^{j\Omega n}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$

$$=\frac{1}{n\pi}\cdot\frac{1}{2j}\left(e^{jn\pi/2}-e^{-jn\pi/2}\right)=\frac{1}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi n}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)=x[n]\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

$$\therefore x[n]=\frac{2}{\pi n}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)=\frac{1}{2}Sa\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

【分析】该题主要考察了常用信号的傅里叶变换，本题考的是抽样函数。我们在解的时候给出了详细的求解过程，在很多情况下，求出 $x[n]$ 只是一个中间过程，后面还有别的问题需要求解。在熟练掌握的情

况下，得到 $x[n]$ 只需一步。大家在复习的时候，要熟练地掌握时域是 Sa 函数，频域是什么？频域是 Sa 函数，时域又是什么？二者在系数上有什么不同？本题的 $F(e^{j\Omega})=\begin{cases}1, & |\Omega|<\pi/2\\ 0, & \pi/2<|\Omega|\le\pi\end{cases}$ 其实是一个理想低通滤波器，它的频谱是周期性的。