中国科学技术大学

843 信号与系统

（真题精讲课程内部讲义）

海文考研专业课教研中心
http://a.wanxue.cn

2012 年真题（回忆版）

1、已知输入信号 x(t)=sinπt[u(t)-u(t-1)]，系统的单位冲激响应 h(t)=u(t)-u(t-1)，求系统的输出 y(t)。

2、由差分方程 $y[n]-0.5y[n-1]=\sum_{k=0}^{4}(x[n-k]-2x[n-k-1])$ 和非零起始条件 y[-1]=1 表示的离散时间因果系统，当系统输入 x[n]=δ[n]时，试用递推算法求：

1）该系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$(至少计算出前 6 个序列值)；

2）该系统的零状态响应 $y_{zi}[n]$(至少计算出前 4 个序列值)。

3、求升余弦函数 $f(t)=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right]$ $(0\le|t|\le\tau)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$。

4、已知离散时间 LTI 系统的单位冲激响应 $h[n]=\frac{\sin(\pi n/4)\sin(\pi n/8)}{\pi n^2}$，求当系统输入为如下的 $x[n]$ 时，系统的输出信号 $y[n]$，$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-2k]e^{jk\pi}+\sum_{k=0}^{2}2^{-k}\cos(2\pi kn/5)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{17\pi n}{8}-\frac{\pi}{3}\right)$。

2011 年真题

一、计算题（1~4 题每题 5 分，5~9 题每题 8 分，共 60 分）

1、连续时间信号 $x(t)=u(t)-u(t-3)$，试画出 $\int_{-\infty}^{t/2}x(\tau)d\tau$ 的波形。

2、已知某因果连续时间信号 $x(t)$，它的拉普拉斯变换的像函数为 $X(s)=(2s+3)/(s^2+5s+6)$，试求信号 $x(t)$ 的初值 $\lim_{t\to0^+}x(t)$ 和终值 $\lim_{t\to\infty}x(t)$。

3、简要回答信源编码和信道编码的作用，及其与有效性和可靠性的关系。

4、当单符号离散信源发出消息的概率分布趋向集中时，试说明信息熵和信源发出消息的不确定性的变化。

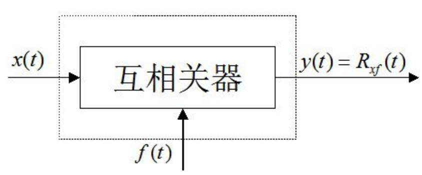


图1.5

5、对于图 1.5 中虚线框内的系统，判断系统的有记忆性，线性，时不变性，因果性和稳定性，如果它是 LTI 系统，试写出它的单位冲激响应 $h(t)$。

6、对于序列 $x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$，计算 $y_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ 和 $y_2[n]=\Delta x[n]$，然后分别画出 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$ 的波形。

7、试求 $X(s)=\dfrac{se^{-2s-2}}{(s+1)(s^2+2s+5)}$， $\mathrm{Re}\{s\}>-1$ 的拉普拉斯反变换。

8、试求 $X(x)=(2z^2+1)/(z^2+z+1)$， $|z|>1$ 的逆 Z 变换。

9、计算信号 $x(t)=\sin(t)[u(t)-u(t-\pi)]$ 与 $y(t)=u(t)-u(t-\pi)$ 的卷积 $z(t)$ 。

二、已知 $f_1(t)\xrightarrow{CFT}F_1(\omega)$， $f_2(t)\xrightarrow{CFT}F_2(\omega)$， $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$ 的波形如图 2(a)、图 2(b)所示，现对信号 $f(t)=f_1(t)+f_2^2(t)$ 进行采样，采样间隔为 T_s，得到采样后的信号 $f_s(t)$，试求：（15 分）

1)为了保证能够从 $f_s(t)$ 恢复 $f(t)$，最大的采样间隔 T_s 为多少？在此采样间隔下，请画出采样后信号 $f_s(t)$ 的频谱 $F_s(\omega)$；（9 分）

2)若将采样后信号 $f_s(t)$ 通过一个频率响应 $H(\omega)$ 如图 2(c)a 所示的理想低通滤波器，试求滤波后的输出信号 $y(t)$ 。（6 分）

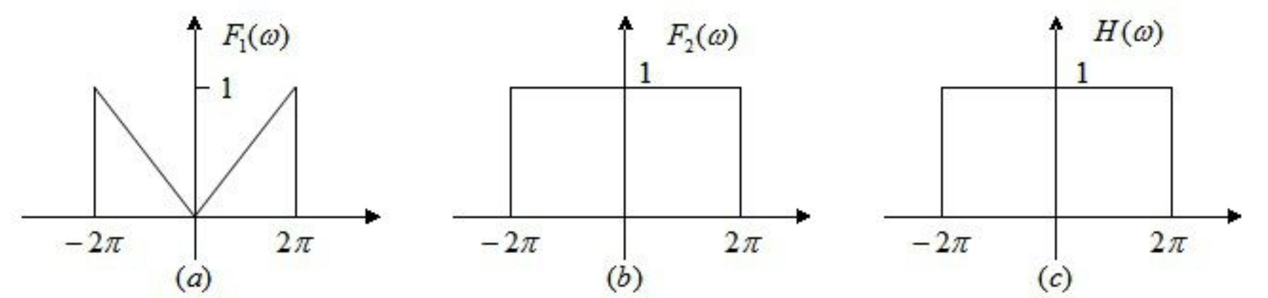


图2

三、由差分方程 $y[n]+0.75y[n-1]+0.125y[n-2]=x[n]+3x[n-1]$ 表示的因果系统，已知其附加条件为 $y[0]=1$， $y[-1]=-6$ 。（20 分）

1)求系统函数 $H(z)$，画出 $H(z)$ 在 z 平面上零极点分布和收敛域；（7 分）

2)试画出用最小数目的三种离散时间基本单元（离散时间数乘器、相加器和单位延时器）实现该系统的规范型实现结构；（5 分）

3)当输入 $x[n]=(0.5)^n u[n]$ 时，求该系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$ 以及零输入响应 $y_{zi}[n]$。（8 分）

四、某 LTI 系统的系统结构如图 4 所示，其中 $H_i(\omega)$ 的频率响应特性为 $H_i(\omega)=[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)]\cdot e^{-j\omega t_0}$ 。（20 分）

1)求系统的单位冲激响应 $h(t)$；（6 分）

2)求系统的频率响应 $H(\omega)$，画出幅频响应和相频响应特性曲线；（8 分）

3)求输入信号 $x(t)=1+[1+\cos(\omega_0 t/2)]\cos(\omega_c t)$ 时的系统输出 $y(t)$。（6 分）

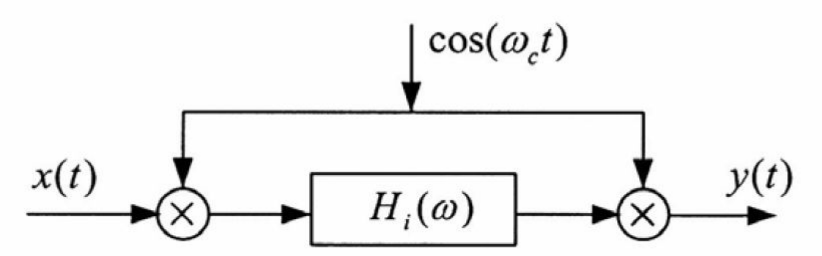


图 4

五、已知 $X(k)=DFT\{x(n)\}$，$0\le k\le 2N-1$，$x(n)$ 为实序列。现要求通过 $X(k)$ 求取 $x(n)$，即对 $X(k)$ 进行 IDFT。请根据 $x(n)$ 序列的特点，设计一种节省计算量的计算方法，仅用一次 N 点的 IDFT 完成反变换。给出求取 $x(n)$ 的计算公式和步骤。（12 分）

六、试用冲激响应不变原则设计一个数字滤波器。已知其参考模拟滤波器的冲激响应为 $h_a(t)=e^{-0.9t}u(t)$，数字系统的采样周期为 T。问题如下（13 分）

1)导出数字滤波器系统函数 $H(z)$；（8 分）

2)试论证采样周期 T 的取值对数字滤波器稳定性的影响。（5 分）

七、当信源 X： $[X.P]:\begin{cases} x: & a_1 \quad a_2 \quad a_3 \\ p(x): & 1/3 \quad 1/3 \quad 1/3 \end{cases}$，首先通过如下信道：$P=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix} \end{array}$ 传输。若此信道输出的信息还需要另一个信道传输，那么后一个信道的信道容量至少需要多少？（10 分）

2010 年真题

一、计算题（1~4 小题每题 5 分，5~8 小题每题 7 分，共 48 分）

1.对于以输入输出关系 $y(t)=x(t)\cos[\omega_0(t-2)+\varphi_0],\omega_0\ne 0$ 描述的系统，简要判断系统的有记忆性，线性，时不变性，因果性和稳定性。

2.对于以输入输出关系 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n+2}(1/2)^{n-k}x[k]$ 描述的系统，简要判断系统的有记忆性，线性，时不变性，因果性和稳定性。

3.计算 $\sin(\pi n/2)/(\pi n)*\sin(\pi n/3)/(\pi n)$，其中符号*为卷积运算符号。

4.计算对连续时间信号 $Sa^2(\omega_0 t)$ 进行采样的奈奎斯特间隔 T_s。

5.已知因果序列 $x[n]$ 的 Z 变换像函数 $X(z)=\dfrac{z^{-3}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$，试求序列 $x[n]$ 的初值 $x[0]$ 和终值 $\lim\limits_{n\to\infty} x[n]$。

6.已知系统的频率响应为 $H(j\omega)=\dfrac{\omega e^{-j(\omega-3\pi/2)}}{10-\omega^2+6j\omega}$，求它的单位冲激响应 $h(t)$。

7.计算信号 $x(t)=u(t)-u(t-\pi)$ 与信号 $y(t)=\cos(t)[u(t)-u(t-\pi)]$ 的互相关函数 $R_{xy}(t)$。

8.已知 $X(s)=\dfrac{1}{(s^2+\pi^2)(1+e^{-2s})},\mathrm{Re}\{s\}>0$，试求 $x(t)$。

二、已知如图 2(a)所示周期三角波信号 $x(t)$，通过一个频率响应特性 $H(\omega)$ 如图 2(b)所示的 LTI 系统。（14 分）

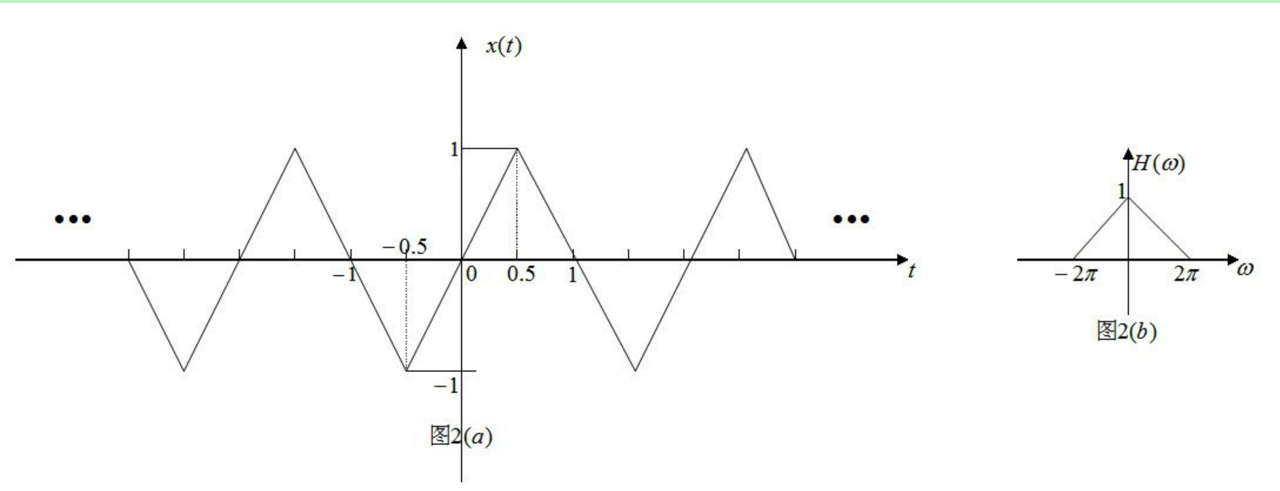


图2(a) 图2(b)

1)试求输出信号 $y(t)$；（10 分）

2)试求该输出信号 $y(t)$ 的功率与输入信号 $x(t)$ 的功率之比值。（4 分）

三、对于如下微分方程描述的连续时间因果系统

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=2[x(t)+e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}x(\tau)d\tau]$$

已知 $x(t)=u(t)$，起始条件为 $y(0\_)=-5$，试求：（16 分）

系统的全响应 $y(t),t\ge 0$，写出系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ 和零状态响应 $y_{zs}(t)$，自由响应 $y_{fr}(t)$ 和强迫响应 $y_{fo}(t)$，暂态响应 $y_{tr}(t)$ 和稳态响应 $y_{st}(t)$。

四、某带通系统的频率响应为

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j(\omega-1000)}+\frac{1}{1+j(\omega+1000)}$$ **。试求：（17 分）**

1)该系统的单位冲激响应 $h(t)$；（6 分）

2)概画 $H(j\omega)$ 的幅频响应特性曲线和相频响应特性曲线；（6 分）

3)系统的输入为 $x(t)=(1+\cos t)\cos(1000t)$，求输出 $y(t)$。（5 分）

五、现欲对一个已知的 N 点序列 $x[n],0\le n<N$ 进行滤波处理，所用滤波器是系统函数为

$$H(z)=\frac{2z+4.5+z^{-1}}{z+4.5+2z^{-1}}$$ **的稳定系统。（25 分）**

1)确定该滤波器所对应的差分方程，给出它的规范型实现方框图；（6 分）

2)画出 $H(z)$ 在 z 平面零极点分布和收敛域；（5 分）

3)概画该滤波器的幅频响应特性曲线；（5 分）

4)假设 MATLAB 中存在一个函数 $y=myfilter(b,a,X)$，它能够实现对一维序列 X 按照向量 $b=[b(1)\quad b(2)\quad\cdots\quad b(nb)]$ 和向量 $a=[a(1)\quad a(2)\quad\cdots\quad a(na)]$ 所确定的因果稳定的滤波器 $H_0(z)=\frac{b(1)+b(2)z^{-1}+...+b(nb)z^{-(nb-1)}}{a(1)+a(2)z^{-1}+...+a(na)z^{-(na-1)}}$ 进行因果滤波。请问能否利用这个函数实现本题的滤波处理？如果能，请分析实现方法，并给出相应的处理过程。（8 分）

六、现有一长度为 N 的序列 $\{x[n],n=0,1,...,N-1\}$。设 N 可以表达为两个正整数的乘积，即 $N=ML$，这里 M 和 L 分别为两个正整数。现欲求序列 $x[n]$ 的 DFT。为减少乘法运算量，要求将该 N 点 DFT 分解为若干 M 点 DFT 和若干 L 点 DFT 进行运算。试求：（15 分）

1)推导出分解运算表达式；（10 分）

2)给出分解运算后的复数乘法运算量，并与直接计算 N 点 DFT 所需的复数乘法运算量作比较，给出你的结论。（5 分）

七、用窗函数法设计具有线性相位特性的 FIR 低通滤波器，系统采样频率为 40kHz。滤波器的幅度特性要求为：通带截止频率 10kHz，过渡带宽为 2kHz，带外最小衰减不低于 50dB。试求：（15 分）

1)根据设计指标要求在下表中选择最佳的窗函数，导出滤波器阶数 N；（7 分）

2)若采用窗函数 $w[n]$，且已经确定滤波器阶数为 N，试导出该滤波器的单位冲激（或单位取样）响应 $h[n]$

的表达式。（8 分）

参考窗函数表			
窗函数	主瓣宽度	旁瓣电平	最小阻带衰减
矩形窗：$w[n]=1,\quad n=0,\ldots,N-1$	$4\pi/N$	$-13dB$	$21dB$
三角形窗：$w[n]=\begin{cases}\dfrac{n}{N/2}, & n=0,\ldots,\dfrac{N}{2}\\ \dfrac{N-n-1}{N/2}, & \dfrac{N}{2}+1,\ldots,N-1\end{cases}$	$8\pi/N$	$-25dB$	$25dB$
Hanning 窗：$w[n]=\sin^2(\frac{\pi}{N}n),\quad n=0,\ldots,N-1$	$8\pi/N$	$-32dB$	$44dB$
Hamming 窗：$w[n]=0.54-0.46\cos\frac{2\pi}{N}n,\quad n=0,\ldots,N-1$	$8\pi/N$	$-42dB$	$53dB$
Blackman 窗：$w[n]=0.42-0.5\cos\frac{2\pi}{N}n+0.08\cos\frac{4\pi}{N}n, n=0,\ldots,N-1$	$12\pi/N$	$-57dB$	$74dB$

2009 年真题

一、某个连续时间因果 LTI 系统的频率响应为 $H(\omega)=\dfrac{(j\omega-2)e^{-j2\omega}}{6-\omega^2+j5\omega}$**，试求：（共 40 分）**

1.请给出该系统的系统函数，画出它的零极点图和收敛域。（5 分）

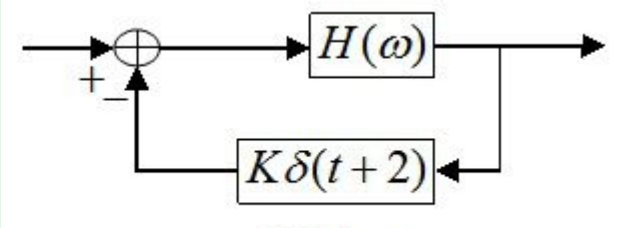
2.给出该系统的微分方程描述，并概画出系统的幅频响应$|H(\omega)|$。（6 分）

3.系统单位阶跃响应$s(t)$，并概画出其波形。（10 分）

4.当该系统的输入信号为$x(t)=u(t)-u(t-2)$时，必须用**时域方法**求系统的输出信号$y(t)$，**若用变换域方法本小题讲不给分**。（8 分）

5.写出该系统的一个延时的**因果**逆系统的系统函数$H_{Inv}(s)$（即要求$h(t)*h_{Inv}(t)=\delta(t-t_0)$，其中$t_0$为正实数），确定其收敛域，判断是否稳定。（6 分）

6.该系统与单位冲激响应为$K\delta(t+2)$的 LTI 系统构成如图 1 所示的反馈系统，请给出该反馈系统的系统函数。（5 分）



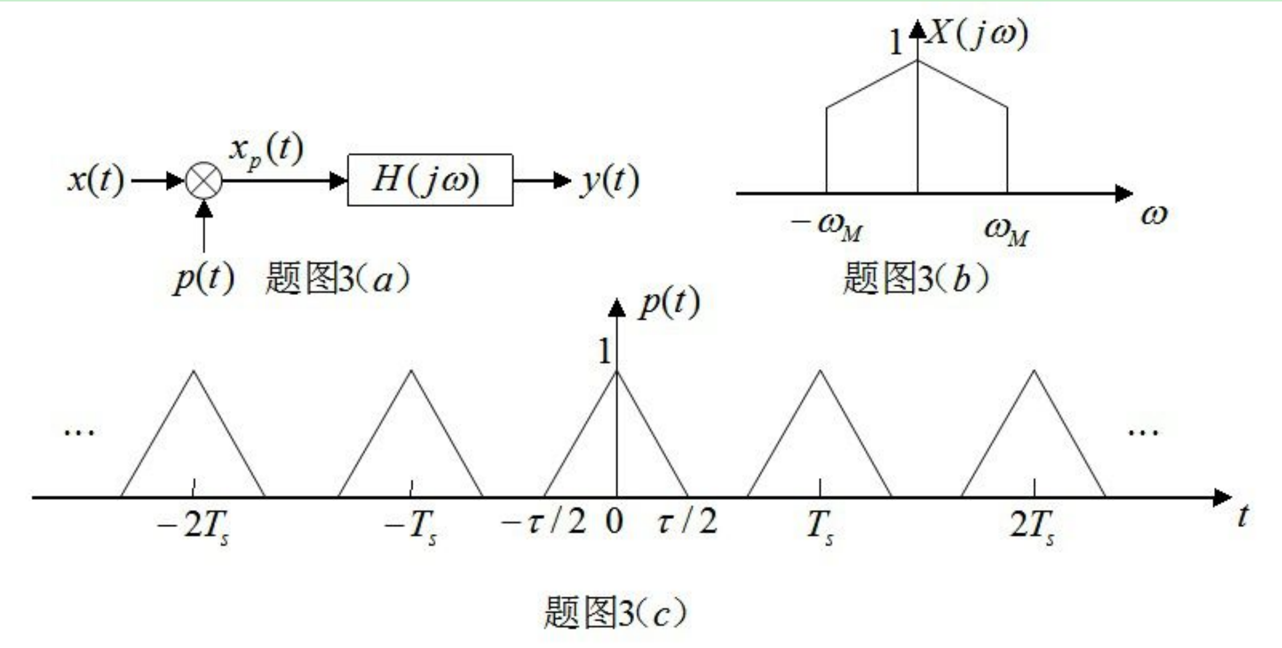
题图 1

二、求解下列两个小题：（共 20 分）

1.已知 $f[n]=x[n]\cos(\pi n/4)$，其离散时间傅里叶变换为 $F(e^{j\Omega})=\begin{cases}1, & |\Omega|<\pi/2\\ 0, & \pi/2<|\Omega|\le\pi\end{cases}$，在 Ω 的主值区间 $(-\pi,\pi)$ 内。是确定序列 $x[n]$，并概画出其序列图形。（10 分）

2.试求由差分方程 $y[n]-(3/2)y[n-1]+(1/2)y[n-2]=x[n]+\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ 和起始条件 $y[-1]=1, y[-2]=2$ 表征的离散时间因果系统，$x[n]=(1/2)^n u[n]$时，系统的输出 $y[n], n\ge 0$。并写出其中的零输入响应 $y_{zi}[n]$ 和零状态响应 $y_{zs}[n]$。（10 分）

三、考虑如题图 3(a)所示的连续时间系统。$x(t)$ 为带限信号，其频谱如题图 3(b)所示。$p(t)$ 为周期三角脉冲信号，其周期为 T_s，脉宽为 τ，如题图 3(c)所示。（共 20 分）

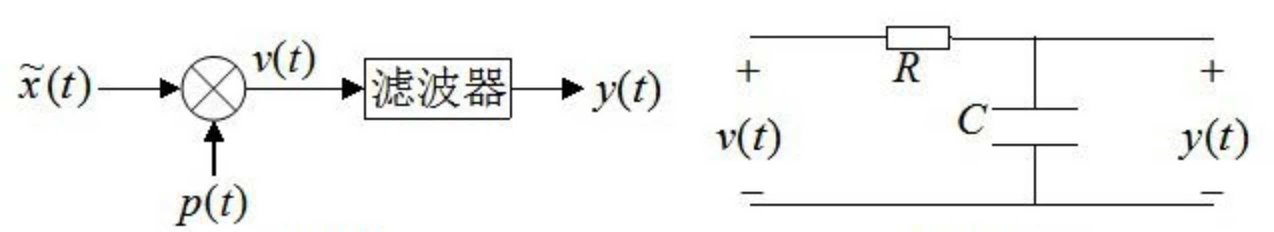


1.试求相乘器输出的信号 $x_{p(t)}$ 的频谱 $X_p(j\omega)$，并概画出该频谱图形。（14 分）

2.如果使用低通滤波器 $H(j\omega)$，从信号 $x_{p(t)}$ 中无失真地恢复原输入信号 $x(t)$，那么周期脉冲信号 $p(t)$ 应该满足什么条件？并确定 $H(j\omega)$ 的特性。（6 分）

四、周期为 T 的实周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的指数形式的傅里叶级数和三角傅里叶级数分别表示为

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k e^{jk(2\pi/T)t} \text{ 和 } \tilde{x}(t)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t+\theta_k\right)$$



题图4(a) 题图4(b)

采用题图 4(a)的系统来获得已知实周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的各次谐波的幅度 c_k 和初相位 $\theta_k, k=1,2,...$。图中，滤波器的单位冲激响应 $h(t)=\dfrac{\sin(\pi t/T)}{\pi t}$。试求：（共 25 分）

1.当 $p(t)=\cos[k(2\pi/T)t]$ 和 $p(t)=\sin[k(2\pi/T)t]$ 时，分别画出 $\tilde{x}(t)$ 和 $v(t)$ 的频谱，并分别求出这两种情况下图 4(a)所示系统的输出 $y(t)$。（10 分）

2.根据 1.小题的结果，设计能分别获得实周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的 k 次谐波的幅度 c_k 和初相位 $\theta_k, k=1,2,...$ 的系统，并画出系统框图。（8 分）

3.如果题图 4(a)中的滤波器换成题图 4(b)所示的一阶 RC 低通滤波器，将对 2.小题设计结果产生什么影响；若要使设计的系统仍希望获得较精准的 c_k 和 θ_k 的值，RC 低通滤波器的时间常数 $\tau=RC$ 的选择应有什么考虑。（7 分）

五、数字滤波器是最常用的数字信号处理方法，对于 *IIR* 和 *FIR* 这两种数字滤波器，有效地实现无限长数字信号 $x[n], n=0,1,...$，的滤波方法是不相同的。（共 25 分）

1.对于 *IIR* 滤波器，若已知滤波器的系统函数 $H_d(z)=\dfrac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}}$，试写出计算无限长数字信号 $x[n]$ 通过该 *IIR* 滤波器的输出信号 $y[n], n=0,1,...$ 的计算公式，以及用三种计算单元（数字相加器、数乘器和单位延时器）的实现框图。（10 分）

2.对于 *FIR* 滤波器，通常采用 *FFT* 程序的快速卷积（或称为频域滤波）方法来实现 $x[n]$ 的数字滤波。若已知 *FIR* 滤波器的单位冲激响应 $h_d[n]=\sum_{k=0}^{15}h_k\delta[n-k]$，试画出采用 128 点 *FFT* 程序，分段计算无限长数字信号 $x[n]$ 通过该 *FIR* 滤波器的输出信号 $y[n], n=0,1,...$ 的实现框图；并分别说明采用**重叠相加法**和**重叠保留法**的快速卷积方法来计算输出信号 $y[n]$，对 $x[n]$ 是如何分段的，又如何从每个分段滤波结果连接成无限长的 $y[n]$。（15 分）

六、加窗是数字信号处理中常见的操作。汉宁窗是一种常见窗序列，其偶对称表示式为：

$$w[n]=\begin{cases}\cos^2(\frac{n}{N}\pi), & n=-\frac{N}{2},\dots,-1,0,1,\dots,\frac{N}{2}\\ 0, & 其他\end{cases}$$

，其中 N 为偶的正整数。（20 分）

1.试确定该汉宁窗的频谱函数 $W(e^{j\Omega})$。（10 分）

2.如果把该汉宁窗的频谱函数表达为 $W(e^{j\Omega})=W(\Omega)e^{-j\Omega\alpha}$，其中 $W(\Omega)$ 为实函数。试概画出 $W(\Omega)$ 的图形。（5 分）

3.在实际的数字信号处理中，通常使用的是单边的汉宁窗，其表示式是 $w[n]=\sin^2(n\pi/N),\quad n=0,1,\dots,N-1$，其中 N 为偶的正整数。对序列 $x[n]$ 进行汉宁窗 $w[n]$ 加权后的离散傅里叶变换为 $X_W[k]=\sum_{n=0}^{N-1}w[n]x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$。试证明，计算 $X_W[k]$，完全可以省略掉 $x[n]$ 与 $w[n]$ 的相乘运算，而直接计算 $x[n]$ 的 DFT 变换 $X[k]$，然后通过对 $X[k]$ 序列进行线性组合来得到 $X_W[k]$。（5 分）