# 第一篇 高等数学

**第七章 无穷级数[1,3]**

## 数项级数

**数项级数的概念和性质**

1. **基本概念**

**定义 1** 设 是一个数列，则称表达式 为一个数项级数，简称级数， 称为数项级数的通项， 称为数项级数的前 项部分和。

**定义 2** 若数项级数的部分和数列 有极限，则称级数 收敛，极限值

称为此级数的和，即 ，当 不存在时，则称级数发散。

**注** 当级数收敛时,其部分和又可看成为 的近似值. 两者之差

= + +… 称为级数的余项.用 代替 所产生的误差就是它的绝对值,即 .

## 收敛级数的基本性质

**性质 1** 若级数 收敛于 ,则级数 也收敛，且其和为 .

**性质 2** 若级数 和 分别收敛于 和 ,则级数 也收敛，且收敛于

.

**注 1** 称为级数 与 的和与差.

**注 2** 若级数 和 之中有一个收敛,另一个发散,则 发散.若两个都发散,则无法判断。

**性质 3** 在级数中去掉、加上或改变有限项、不会改变级数的收敛性。

**性质 4** 如果级数收敛，则对这级数的项任意加括号后所成的级数

仍收敛，且其和不变。

**性质 5（级数收敛的必要条件）** 如果级数收敛，则它的一般项 趋于零，即



**注 1** 反之,则不一定成立.即 , 原级数不一定收敛. 如调和级数 发散,但 .

**注 2** 收敛的必要条件常用来证明级数发散.即若 ,则原级数 一定不收敛.

## 正项级数

**正项级数概念与特点**

如果级数中各项是由正数或零组成,这就称该级数为正项级数.

设 为一正项级数, 为其部分和.显然部分和序列 是一个单调上升数列.如果

数列 有界，则根据单调有界数列必有极限准则，得级数收敛；相反地，若级数收敛，有部分和数列有界。从而得正项技术收敛的充分必要条件。

**定理 1** 正项级数

收敛 部分和数列 有上界。

## 正项级数的判别法

**定理 2(比较审敛法)** 设与 是两个正项级数,且 .那么如果  收敛,则 收敛；反之，如果 发散,则 发散.

**推论** 设两个正项级数与 ,如果级数 收敛，且存在自然数 ，使当

时有 成立，则级数 收敛；如果级数 发散，且当 时有成立，则级数 发散。

**定理 3（比较审敛法的极限形式）** 设两个正项级数与 ,如果存在极限:

1. 当 ,则级数 与 同时收敛或同时发散.
2. 当 时,如果 收敛,则级数 必收敛. (3)当 ,如果 发散,则 必发散.

**定理 4（比值审敛法，达朗贝尔 判别法）** 设正项级数 ,如果极限

,则

1. 当 时,级数收敛;
2. 当 或 时,级数发散.
3. 当 时,无法判断.

**定理 5（根值审敛法， 判别法)** 设为正项级数,如果 ,则

1. 当 时,级数收敛;
2. 当  (或为 )时,级数发散.
3. 当 时,法则失效.

**定理 6（极限审敛法**）设为正项级数

1. 如果 （或 ），则级数 发散
2. 如果 ，而 ，则级数 收敛。

## 交错级数

交错级数的各项是正负交错的，设 ，称级数 为交错级数。

**定理 7 (莱布尼兹判别法)** 若交错级数 满足:

（1）

（2）

则级数 收敛,其和 ,余项 的绝对值 .

**注** 莱布尼兹条件是交错级数收敛的充分条件，即若级数不满足莱布尼茨条件不一定发散。

## 任意项级数

1. 绝对收敛与条件收敛

设  为任意项级数,其各项的绝对值组成的正项级数 收敛,就称 绝对收敛; 若  收敛,但 不收敛,就称 为条件收敛。

1. 任意项级数的判别法

**定理 8** 如果级数绝对收敛，则级数 必定收敛。

## 幂级数函数项级数

如果定义在区间 上的函数 则由这函数列构成的表达式

,

,

## 幂级数的有关概念幂级数的定义

**定义** 设 是一实数列，则称形如 的函数项级数为 处

的幂级数， 时的幂级数为 ，其中常数 叫做幂级数的系数。

泰勒级数





**定理** 设 在 某邻域内具有任意阶导数，则泰勒级数 收敛于的充分条件 ，其中

。

## 幂级数的收敛半径

**定理 9**(阿贝尔定理) 设幂级数

=  (1)

若幂级数(1)在 处收敛,则对于满足条件 的一切 ,级数

(1)绝对收敛.反之,若它在 时发散,则对一切适合不等式 的 ,级数(1)发散.

**推论 1** 若幂级数在 处发散，则当 时， 发散

**推论 2** 如果幂级数(1)不是在 上每一点都收敛,也不是只在 处收敛,那么必存在一个唯一的正数R,使得:



1. 当 时,幂级数(1)收敛;
2. 当 时,幂级数(1)发散;
3. 当 或 ,幂级数(1)可能收敛,也可能发散.

（2）收敛半径的求法

**定理 10** 设幂级数,其系数当 时 ( 为某一个正整数),且存在极限

则 1) 当 时,收敛半径 ;

1. 当 时,收敛半径 ;
2. 当 时,收敛半径 .

**引申** 对于幂级数，若 ，且 ，则 ， 所以，当 ，即 时， 绝对收敛；当 ，即 时，

发散，因此，由收敛半径的定义便得 。

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 特别地，当 时， | ；当 | 时， | ；或者令 |  | 转 |
| 化为不缺项的幂级数即可。**幂级数的性质** |  |  |  |  |  |
| （1）加法 设幂级数 |  | 和 |  |  | 的 |
| 收敛半径分别为 和 ,则幂级数 |  | 的收敛半径为 |  | ,且 |  |

=

1. 和函数的连续性 幂级数 的和函数 在其收敛域 上连续；
2. 可积性与逐项积分公式 幂级数

的和函数 在其收敛域 上可积，并有逐项积分公式

逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径。

1. 可导性与逐项积分公式 幂级数的和函数 在其收敛区间 上可导，且有逐项求导公式， 逐项求导

后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径。

## 函数展开成幂级数

**定理** 设函数在点在点的某一邻域 内具有各阶导数则 在该邻域内能展开成泰勒级数的充分必要条件是 的泰勒公式中的余项 当 时的极限为零

 即

## 函数展成幂级数的布骤:

(1)求出 的各阶导数: , ,…, ,…,若在 处, 的某阶导数不存在,即终止.此函数不能展开成幂级数.

(2)求出 , , ,…, ,…,

(3)求出幂级数 的收敛半径R.观察当

时,是否有 ,如无,则说明 不能展开成幂级数;若有,则说明可以展开成幂级数,且有

= ,

## 常见的幂级数展开式

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7) (随a 的不同而不同，但

在(-1，1)总有意义)

## 傅里叶级数

周期为 的傅里叶级数[1]

**定义** 设函数 是周期为 的周期函数，且在 上可积，则称



为 的傅里叶系数；称级数 为 的以 为周期的傅

里叶级数，记作 **。**

**定理**(狄利克雷 充分条件,收敛定理) 设 是以 为周期的函数,如果它满足:

1. 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点; (2)在一个周期内至多只有有限个极值点

则 的傅里叶r 级数在收敛,并且当 为 的连续点时,级数收敛于 ;当 为

的间断点时,级数收敛于:

**正弦级数和余弦级数** 当为奇函数时， 是奇函数 是偶函数

 故傅里叶系数为 ， 因此奇

函数的傅里叶级数是只含有正弦项的正弦级数 

当 为偶函数时 是偶函数 是奇函数 故傅里叶系数

为   因此偶函数的傅里叶级数是只含有余弦项的余弦级数 

**周期为 的傅里叶级数** 设函数 是周期为 的周期函数， 且在 上可积，则称

为 的



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 以 为周期的傅里叶系数；称级数的傅里叶级数，记作的傅里叶级数展开1)正弦级数展开 | 为只在 | 的以 为周期上有定义的函数 |
| ， |  |  |
| ，2）余弦级数展开 |  |  |
| ， |  |  |

，

# 第八章 常微分方程

## 常微分方程的有关概念

**常微分方程** 含有一元未知函数及其导数的方程称为常微分方程，简称微分方程。

**阶** 微分方程中含有的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶。

**解** 若记自变量为 ，未知函数为 ，则n 阶微分方程的一般形式是

若函数 在I 上存在 n 阶导数，且满足方程

则称 是微分方程

在I 上的一个解。n 阶微分方程的含有 n 个相互独立的任意常数的解称为它的通解，不含有任意常数的解称为它的特解，由通解确定特解的条件称为定

解条件。微分方程的解 所表示的曲线称为微分方程的积分曲线。

## 可分离变量方程

**解法** 两边同除 ，得



## 齐次方程

**解法** 令，则 ， 于是，原方程



**可化为齐次型的方程 解法** (1)当时

属于(2)

1. 即 则

令 ，则 属于（1）

1. 不全为 0 解方程组 求交点令 则原方程 属于（2）

## 一阶线性方程

**解法** 用常数变易法求

(1)求对应齐次方程 的通解(2)令原方程的解为

1. 代入原方程整理得 
2. 原方程通解 

**贝努里方程 **其中

**解法** 令，则方程

， 属于（3）

**全微分方程 **为全微分方程

。通解为

## 二阶线性方程的一般形式

 (8.1)

其中 均为连续函数，当右端顶 时，称为二阶线性齐次方程，否则称为非齐次方程。

## 解的性质与结构

1. 若 为齐次方程 (8.2)

的两个特解，则其线性组合 仍为(8.2)的解，特别地，若 线

性无关 ，则(8.2)的通解为

1. 设 为非线性方程(8.1)的两个特解，则其差 为相应齐次方程(8.2)的特解
2. 设 为非齐次方程(8.1)的一个特解， 为齐次方程(8.2)的任意特解，则其和 为(8.1)的解，特别

地，若 为(8.2)两个线性无关的特解，则(8.1)的通解为 ，其中 为任意常数。

**二阶常系数线性齐次方程 ** (1) 其中p，q 均为常数

**解法** 特征方程 

1. 当 为相异的特征根时，方程(1)通解为 
2. 当 时，通解为
3. 当 （复根）时，通解为 

## 阶常系数齐次线性方程

此种方程的一般形式为 (＊)，其中

为常数，相应的特征方程为 特征根

与通解的关系同二阶

方程的情形相类似，具体结果为：

若 是个 相异实根，则方程(＊)的通解为



1. 若 为特征方程的 重实根，则(＊)的通解中含有：



1. 若 为特征方程的 重共轭复根，则(＊)的通解中含有：



**二阶常系数线性非齐次方程** (2)其中p，q 均为常数

**解法** 通解的求法程序

1. 求对应齐次方程的通解 ；
2. 求出(2)的特解 ；
3. 方程(2)的通解 方程(2)特解 的求法有三种：微分算子法、常数变易法、特定系数法。

**欧拉方程** 形如的方程成为欧拉方程。

* 1. **差分方程[3] 函数差分的定义**

函数 函数 在 时刻的一阶差分定义为



函数 在 时刻的**二阶差分**定义为

；

其余类推，函数 在 时刻的 **n 阶差分**定义为

## 差分方程及其基本概念

**(1) 差分方程的定义** 含有自变量t，未知函数以及 的差分 ， ， 的函数方程，称为（常）差分方程。

n 阶差分方程的一般形式为

（1）

这里F 为已知函数，且 必定出现。n 阶差分方程的另一种一般形式为

（2）

F 是已知函数。

1. **差分方程的阶** 出现在差分方程（1）中差分的最高阶数，称为差分方程的**阶。**出现在差分方程(2)中未知函数下标的最大差，称为差分方程的**阶。**
2. **差分方程的解** 若函数代入方程(2），使之对一切的t 均称为恒等式，则称

为差分方程(2）的**解。**含有n 个任意独立常数的解称为n 解差分方程(2）的**通解。**在通解中给任意常数

以确定的值而得出的解，称为 n 阶差分方程(2)的**特解一阶常系数线性差分方程**

 （3）

其中 为已知函数， 为非零常数。当时，方程(3)变为 ，（4） 称（3）为一阶常系数**非齐次线性差分方程，**称(2)为其对应的一阶常系数**齐次线性差分方程**。

## 齐次差分方程的通解

通过迭代，并由数学归纳法可得（4）的通解为  C 为任意常数。

## 非齐次差分方程的解的性质

① 若 是非齐次差分方程（3）的一个特解， 是齐次差分方程（4）的通解，则非齐次差分方程（3）的通解为 。

② 若 与 分别是差分方程 和 的解，则 + 是差分方程 + 的解。

## 非齐次差分方程(3)的特解 形式的设定如下表



**初等数学必背公式**

1. **一些初等函数**

双曲正弦： 双曲余弦： 双曲正切：



## 比例







1. (4)



1. (5)



## 不等式



1. 非负数的算术平均值不小于其几何平均值，即



(5)绝对值不等式



## 二次方程



1. **一元三次方程的韦达定理**



1. **指数**



1. **对数**



 



]



## 平面几何图形面积

1. 任意三角形



1. 平行四边形



1. 梯形 S=中位线 x 高
2. 扇形



## 旋转体

1. 圆拄

设 R----底圆半径，H 拄高，则

1. 侧面积 ，
2. 全面积
3. 体积
4. 圆锥 （ ）
5. 侧面积
6. 全面积 
7. 体积 
8. 球

设 R----半径， d 直径，则

1. 全面积 ；
2. 体积 
3. 球缺（球被一个平面所截而得到的部分） 1）面积 ；

2）体积 

## 棱拄及棱锥

设 S----底面积，H----高：（1）棱拄体积 （2）棱锥体积 （3）正棱锥侧面积

## 平面三角

**三角函数间的关系**

（1）

（2）

（3）

（4）

1. （5）
2. （6）
3. （7）
4. （8）

## 和差化积与积化和差







**倍角公式与半角公式**







**三角函数的和差化积与积化和差公式**







**边角关系**

1. 正弦定理

，R 为外接圆半径

1. 余弦定理



## 反三角函数恒等式



哲学考研交流群

经济学考研交流群

 法学考研交流群

教育学考研交流群

文学考研交流群

历史学考研交流群

理学考研交流群

工学考研交流群

农学考研交流群

医学考研交流群

管理学考研交流群

艺术学考研交流群