

杭州电子科技大学
2017 年攻读硕士学位研究生招生考试
《高等代数》试题

(试题共 九 大题, 共 3 页, 总分 150 分)

姓名_____报考专业_____准考证号_____

【所有答案必须写在答题纸上, 做在试卷或草稿纸上无效!】

一、本大题 15 分

设

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 - 6x^2 + x - 3, \quad g(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 - 8x - 3$$

(I) 求 $(f(x), g(x))$;

(II) 求 $u(x), v(x) \in \mathbf{P}[x]$ 使得 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.

二、本大题 15 分

计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

三、本大题 15 分

已知向量组

$$\alpha_1 = (1, 0, 2, 3), \alpha_2 = (1, 1, 3, 5), \alpha_3 = (1, -1, t, 1), \alpha_4 = (1, 2, 4, t+7).$$

问: t 取何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关?

四、本大题 15 分

已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $A^*X = A^{-1} + 2X$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵,

求矩阵 X .

五、本大题 15 分

设 A, B 分别为 m 阶、 n 阶正定矩阵, 证明: $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 是正定矩阵.

六、本大题 15 分

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (I)$$

的系数矩阵 A 的秩等于矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

的秩. 证明: 方程组 (I) 有解; 问逆命题是否成立? 为什么?

七、本大题 20 分

试问 a, b 取何值时线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - 5x_3 = a \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + (b-2)x_3 = -1 \end{cases}$$

有唯一解, 无解, 无穷多解? 有解时写出全部解 (无穷多解时求出它的结构解).

八、本大题 20 分

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & k \\ 4 & k & 0 \end{pmatrix}$, 正交线性替换 $X = PY$ (其中 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, P 为

正交矩阵) 使二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X'AX$ 化为标准形, 且 P 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求常数 k 及二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的标准形;

(2) 是否存在正交矩阵 Q , 使 $Q'A'Q = \Lambda$ 为对角矩阵? 若是, 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ ; 若否, 请说明理由.

九、本大题 20 分

设 σ 为 n 维线性空间 V 的一个线性变换, 且 $\sigma^2 = \sigma$. 证明:

- (1) σ 的特征值只能是 1 和 0;
- (2) 若用 V_1 和 V_0 分别表示对应于特征值 1 和 0 的特征子空间, 则

$$V_1 = \sigma V, \quad V_0 = \sigma^{-1}(0);$$

- (3) $V = V_1 \oplus V_0$;
- (4) σ 只有特征值 0 的充分必要条件是 σ 为零变换.