

## 宝鸡文理学院

# 2022 年硕士研究生招生考试大纲

考试科目名称：高等代数 考试科目代码：[803]

### 一、考试要求

#### 1. 基本概念

数域，一元多项式，整除，最大公因式，互素，不可约多项式， $k$  重因式，多项式的根和  $k$  重根，本原多项式。

$n$  级行列式，矩阵和初等变换，余子式和代数余子式。

$n$  维向量，线性组合、等价、线性相关、线性无关、极大线性无关组，秩，基础解系。

矩阵的加法、减法、数乘、乘法和转置，可逆矩阵和伴随矩阵，分块矩阵。

二次型的矩阵、线性替换，矩阵合同，实二次型的正（负）惯性指数和符号差，正定二次型和正定矩阵。

单射、满射和双射，线性空间，线性相关，线性无关，基，维数，过渡矩阵，子空间、生成子空间，交子空间，和子空间，直和，同构。

线性变换，线性变换的矩阵，特征值与特征向量，核与值域。

欧氏空间，内积，向量的长度和夹角，正交，度量矩阵，正交基，标准正交基，正交矩阵，正交变换，对称变换，正交补。

#### 2. 基本定理和性质

带余除法定理，整除的性质，最大公因式存在唯一性，互素的性质，不可约多项式的性质、因式分解定理，多项式  $k$  重因式的性质。

行列式按行（列）展开定理，克兰姆法则。

线性相关、线性无关、极大线性无关组和秩的性质，矩阵秩的性质，线性方程组的有解判定定理，齐次线性方程组和非齐次线性方程组解的性质及结构。

矩阵乘积行列式公式和秩的公式，矩阵可逆的充要条件，等价矩阵的不变性

质。

实二次型的惯性定理，用非退化线性替换化二次型为规范形，正定二次型和正定矩阵的性质。

线性相关、线性无关、基、维数的性质，过渡矩阵的性质，基变换及向量的

坐标变换公式，交子空间及和子空间的性质，维数定理，同构的充要条件。

线性变换的加法、数乘和乘法运算法则，线性变换与矩阵之间的关系，线性变换（矩阵）的特征值、特征向量、特征多项式和特征子空间的性质，值域与核的关系。

$n$  维欧氏空间标准正交基的存在性和标准正交基之间过渡矩阵的性质，欧氏空间同构的充要条件，正交变换和对称变换的性质，正交补的性质，实对称矩阵特征值的性质。

### 3. 基本方法

判断一个数集是数域，一元多项式的加法、减法和乘法运算，运用带余除法计算商式和余式，用辗转相除法求最大公因式，运用艾森斯坦判别法判别有理数域上的不可约多项式，证明多项式的整除性，最大公因式、互素与不可约多项式的证明方法。

求排列的逆序数的方法，计算  $n$  级行列式的各种方法。

用消元法解线性方程组，判断和证明向量组的线性相（无）关性，求向量组和矩阵的秩，线性方程组有唯一解、有无穷多解和无解的条件，求齐次线性方程组的基础解系和非齐次线性方程组的通解。

矩阵的加法、减法、数乘、乘法和转置的运算，求逆矩阵的方法。

求二次型的矩阵，化二次型为标准形和规范形，求实二次型的正（负）惯性指数和符号差，证明和判断二次型或矩阵的正定性。

线性空间和子空间的判断与验证，求向量关于给定基的坐标和两组基的过渡矩阵。判断和证明向量组线性相（无）关或是基，求线性子空间的维数，证明子空间的直和。

求线性变换关于给定基的矩阵，求线性变换（矩阵）的特征多项式、特征值和特征向量，求线性变换的值域、核、秩和零度，线性变换（矩阵）对角化的方法。

欧氏空间的判别，求向量的长度和夹角，判断和证明向量组是标准正交基，用施密特正交化过程求标准正交基，用正交变换化实二次型为标准形。

## 二、考试内容

### 1. 多项式

- (1) 数域的定义和性质。
- (2) 一元多项式的概念和运算。

- (3) 带余除法定理、整除的概念和性质。
- (4) 多项式的最大公因式和互素的概念、性质与辗转相除法。
- (5) 不可约多项式定义与性质、因式分解定理和标准分解式。
- (6) 多项式的  $k$  重因式和导数（微商）的定义、性质及其判别方法。
- (7) 多项式函数、多项式的根和  $k$  重根的定义，余数定理和综合除法。
- (8) 复（实）系数多项式中的不可约多项式和因式分解定理。
- (9) 本原多项式的概念和性质，整系数多项式有理根的性质和求法，艾森斯坦判别法。

## 2. 行列式

- (1) 二、三级行列式的定义和作用，求二、三级行列式的值。
- (2)  $n$  元排列、逆序和奇偶排列的概念及性质，求逆序数的方法。
- (3)  $n$  级行列式的定义，确定行列式中任一项的符号。
- (4)  $n$  级行列式的性质，计算行列式的值。
- (5) 矩阵和初等变换的定义，用初等变换计算行列式的值。
- (6) 余子式和代数余子式的概念，行列式按行（列）展开公式，用降级法、加边法和递推法计算行列式的值。
- (7) 用克兰姆法则解线性方程组。

## 3. 线性方程组

- (1) 用消元法解线性方程组。
- (2)  $n$  维向量和  $n$  维向量空间的概念及运算。
- (3) 线性组合、等价、线性相关、线性无关、极大线性无关组和向量组的秩等概念及性质，线性相（无）关的判断和证明。
- (4) 矩阵的秩的概念及性质，求秩的方法。
- (5) 线性方程组的有解判定定理，线性方程组有唯一解、有无穷多解和无解的判断。
- (6) 齐次线性方程组的基础解系的概念及求法，非齐次线性方程组的解的性质及结构，会求线性方程组的通解。

## 4. 矩阵

- (1) 矩阵的加法、减法、数乘、乘法和转置的运算及性质。
- (2) 矩阵乘积行列式公式和秩的公式，运用这些公式进行证明。
- (3) 可逆矩阵和伴随矩阵的定义与关系，矩阵可逆的充要条件，求逆矩阵的方法。
- (4) 分块矩阵的加、减、数乘和乘法运算。
- (5) 矩阵的等价和初等矩阵的概念，掌握初等矩阵与初等变换的关系和等价矩阵的不变性质。

(6) 分块矩阵的初等变换, 用初等变换求分块矩阵的逆矩阵。

## 5. 二次型

(1) 二次型的矩阵、线性替换和矩阵合同的概念, 二次型与对称矩阵的一一对应关系。

(2) 化二次型为标准形的方法。

(3) 二次型的秩、复(实)二次型的规范形、实二次型的正(负)惯性指数和符号差的概念, 复(实)二次型的规范形的唯一性和实二次型的惯性定理, 用非退化线性替换化二次型为规范形。

(4) 正定二次型和正定矩阵的概念和性质。

## 6. 线性空间

(1) 映射的概念和运算, 单射、满射和双射的判别。

(2) 线性空间的定义与基本性质。

(3) 向量的线性组合、向量组的等价、线性相关、线性无关、基、维数和坐标的定义及性质, 求向量关于给定基的坐标。

(4) 过渡矩阵的概念和性质, 基变换及向量的坐标变换公式。

(5) 子空间、生成子空间和线性方程组解空间的概念及性质。

(6) 交子空间及和子空间的概念及性质, 维数定理。

(7) 直和的概念及充要条件。

(8) 同构的概念及充要条件。

## 7. 线性变换

(1) 线性变换的定义和性质。

(2) 线性变换的加法、数乘和乘法运算及法则。

(3) 线性变换的矩阵的概念、线性变换关于不同基的矩阵和线性变换与矩阵之间的关系, 线性变换下向量的坐标公式。

(4) 线性变换(矩阵)的特征值、特征向量、特征多项式和特征子空间的概念及性质。

(5) 线性变换(矩阵)可对角化的条件, 线性变换(矩阵)对角化的方法。

(6) 线性变换的值域、核、秩和零度的概念, 秩与零度(值域与核)的关系, 求核与值域的方法。

(7) 不变子空间的概念与性质。

## 8. 欧氏空间

(1) 欧氏空间、内积、向量的长度、夹角、正交和度量矩阵的概念及基本性质。

(2) 正交向量组、正交基、标准正交基和正交矩阵的概念,  $n$  维欧氏空间的标准正交基的存在性和标准正交基之间过渡矩阵的性质, 施密特正交化过程。

- (3) 欧氏空间同构的定义和同构的充要条件。
- (4) 正交变换的定义及等价条件。
- (5) 正交补的概念及性质。
- (6) 对称变换的定义及性质，实对称矩阵特征值的性质，用正交变换将实二次型化为标准形的方法。

### 三、试卷结构

- 1. 考试时间：180 分钟
- 2. 分数：150 分
- 3. 题型结构
  - (1) 填空题（20 分）
  - (2) 单项选择题（30 分）
  - (3) 计算题（60 分）
  - (4) 证明题（40 分）

### 四、考试内容来源

北京大学数学系前代数小组编，王萼芳，石生明修订，《高等代数》。高等教育出版社，2013。